Vraag	Antwoord	Scores

Een symmetrische gebroken functie

1 maximumscore 3

- $\frac{2}{1+e^x} < \frac{1}{100}$ is (omdat $1+e^x$ positief is voor iedere x) gelijkwaardig met $1+e^x > 200$ — 2
- Dit geeft $e^x > 199$, dus de oplossing is $x > \ln 199$ — 1

of

- $\frac{2}{1+e^x} = \frac{1}{100}$ is gelijkwaardig met $1+e^x = 200$ — 1
- $e^x = 199$ geeft $x = \ln 199$ — 1
- De oplossing is $x > \ln 199$, met toelichting — 1

2 maximumscore 4

- De afgeleide van $2x - 2\ln(1+e^x)$ is $2 - 2\cdot\frac{1}{1+e^x}\cdot e^x$ — 2
- $2 - 2\cdot\frac{1}{1+e^x}\cdot e^x = \frac{2(1+e^x)-2e^x}{1+e^x} = \frac{2}{1+e^x}$ $(= f(x))$ — 2

3 maximumscore 5

- De gevraagde oppervlakte is $\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx = \Big[2x - 2\ln(1+e^x)\Big]_0^{\ln 3}$ — 1
- Als $x = \ln 3$ dan $2x - 2\ln(1+e^x) = 2\ln 3 - 2\ln 4$ — 1
- Als $x = 0$ dan $2x - 2\ln(1+e^x) = -2\ln 2$, dus de gevraagde oppervlakte is $2\ln 3 - 2\ln 4 + 2\ln 2$ — 1
- $2\ln 3 - 2\ln 4 + 2\ln 2 = \ln 9 - \ln 16 + \ln 4$ (of: $2\ln 3 - 2\ln 4 + 2\ln 2 = 2\big(\ln 3 - \ln 4 + \ln 2\big) = 2\ln(\frac{3}{4}\cdot 2)$) — 1
- $\ln 9 - \ln 16 + \ln 4 = \ln(\frac{9}{16}\cdot 4) = \ln\frac{9}{4}$ (of: $2\ln(\frac{3}{4}\cdot 2) = \ln(\frac{3}{2})^2 = \ln\frac{9}{4}$) — 1

4 maximumscore 5

- $f(-x)=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ 1
- Dus $f(x)+f(-x)=\dfrac{2}{1+e^{x}}+\dfrac{2}{1+e^{-x}}=\dfrac{2(1+e^{-x})+2(1+e^{x})}{(1+e^{x})(1+e^{-x})}$ 1
- De teller is gelijk aan $2(e^{x}+e^{-x}+2)$ 1
- De noemer is gelijk aan $1+e^{-x}+e^{x}+1=e^{x}+e^{-x}+2$ 1
- Dit geeft $f(x)+f(-x)=\dfrac{2(e^{x}+e^{-x}+2)}{e^{x}+e^{-x}+2}=2$ en dus $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=1$ 1

of

- $f(-x)=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ 1
- Teller en noemer vermenigvuldigen met e^{x} geeft $f(-x)=\dfrac{2e^{x}}{e^{x}+1}$ 2
- Dit geeft $f(x)+f(-x)=\dfrac{2}{1+e^{x}}+\dfrac{2e^{x}}{1+e^{x}}=\dfrac{2+2e^{x}}{1+e^{x}}=2$, dus $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=1$ 2

Gelijke afstanden

5 maximumscore 4

- Uit de gegevens volgt: $LP=LQ$ en $PR=MQ$ 1
- Verder geldt $ML=MQ-LQ$ en $LR=PR-PL$ 1
- Dus $ML=LR$ 1
- Hieruit volgt: L ligt op de middelloodlijn van MR; *middelloodlijn* 1

6 maximumscore 4

- De meetkundige plaats is een deel van de parabool met brandpunt M en richtlijn k 1
- De eindpunten van het betreffende deel van de parabool zijn de eindpunten van de cirkelboog 1
- De top van de parabool is getekend als midden van het loodlijnstuk vanuit M op k 1
- Minstens twee andere punten van het deel van de parabool zijn getekend door een punt R op k te kiezen en het snijpunt van de middelloodlijn van MR en de loodlijn door R op k te bepalen (of: door een cirkelboog te tekenen met middelpunt M en een straal die kleiner is dan de straal van de gegeven cirkelboog en snijpunten hiervan te bepalen met de lijn die parallel is met k en die tussen g en k ligt zo dat de afstand tot k gelijk is aan de straal van de nieuwe cirkelboog) 1

Het ontwerp van een brug

7 maximumscore 2

- Uit de vergelijking volgt dat de afstand tussen A en B gelijk is aan p — 1
- Aan eis 1 is voldaan als $p \geq 8{,}00$ (of: $p > 8{,}00$) — 1

8 maximumscore 5

- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0{,}40 \cdot -\sin\left(\frac{2\pi}{p} x\right) \cdot \frac{2\pi}{p}$ — 2
- De maximale helling is (omdat p positief is en $-\frac{1}{2} p \leq x \leq \frac{1}{2} p$) $\frac{0{,}80\pi}{p}$ — 1
- Beschrijven hoe de ongelijkheid $\frac{0{,}80\pi}{p} \leq \frac{1}{15}$ (met $p > 0$) kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: $p \geq 12\pi$ (of: $p \geq 37{,}7$) — 1

9 maximumscore 4

- De lengte van boog AB is $\int_{-20{,}00}^{20{,}00} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$ — 2
- Beschrijven hoe deze integraal berekend kan worden — 1
- De lengte van het brugdek (boog AB) is 40,04 meter — 1

10 maximumscore 5

- De oppervlakte van de zijkant van het rechterdeel is gelijk aan $\int_{8{,}00}^{20{,}00} 0{,}40\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{20{,}00} x\right)\right)\mathrm{d}x$ — 2
- Beschrijven hoe deze integraal berekend kan worden — 1
- Deze oppervlakte is ongeveer 2,38 (m^2) — 1
- (Er is ongeveer) $2 \cdot 3{,}50 \cdot 2{,}38 \approx 17$ (m^3 beton nodig) — 1

Verticale en horizontale verbindingslijnstukken

11 maximumscore 5

- Opgelost moet worden $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{6}$ — 1
- Herleiden tot $a^2 - 6a + 6 = 0$ — 2
- Beschrijven hoe deze vergelijking algebraïsch opgelost kan worden — 1
- De antwoorden $a = 3 - \sqrt{3}$ en $a = 3 + \sqrt{3}$ (of vergelijkbare uitdrukkingen) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

12 **maximumscore 6**

- De lengte van het verbindingslijnstuk op hoogte b is $\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{b}$ — 1
- De afgeleide van $\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{b}$ is $-\frac{1}{2b\sqrt{b}}+\frac{1}{b^2}$ (of $-\frac{1}{2}b^{-1\frac{1}{2}}+b^{-2}$) — 2
- Beschrijven hoe de vergelijking $-\frac{1}{2b\sqrt{b}}+\frac{1}{b^2}=0$ (of $-\frac{1}{2}b^{-1\frac{1}{2}}+b^{-2}=0$) kan worden opgelost — 1
- De oplossing $b=4$ — 1
- De maximale lengte is $\frac{1}{4}$ (of 0,25) — 1

13 **maximumscore 7**

- $f(x)=4$ geeft $\frac{1}{x}=4$ dus $x=\frac{1}{4}$ en $g(x)=4$ geeft $\frac{1}{x^2}=4$ dus (omdat $x>0$) $x=\frac{1}{2}$ — 1
- De oppervlakte van V is $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(4-\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ — 2
- Bijbehorende primitieven zijn $4x-\ln x$ en $-\frac{1}{x}-\ln x$ — 2
- De oppervlakte van V is dus $(2-\ln\frac{1}{2})-(1-\ln\frac{1}{4})+(-1-\ln 1)-(-2-\ln\frac{1}{2})$ — 1
- Het antwoord is $2-\ln 4$ (of $2-2\ln 2$ of $2+\ln\frac{1}{4}$) — 1

of

- $f(x)=4$ geeft $\frac{1}{x}=4$ dus $x=\frac{1}{4}$ en $g(x)=4$ geeft $\frac{1}{x^2}=4$ dus (omdat $x>0$) $x=\frac{1}{2}$ — 1
- De oppervlakte van V is $(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})\cdot 4+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ — 2
- Bijbehorende primitieven zijn $-\frac{1}{x}$ en $\ln x$ — 2
- De oppervlakte van V is dus $1+(-1+2)-(\ln 1-\ln\frac{1}{4})$ — 1
- Het antwoord is $2-\ln 4$ (of $2-2\ln 2$ of $2+\ln\frac{1}{4}$) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Het midden van een koorde

14 maximumscore 3

- $\Delta MSP \cong \Delta MSQ$; (*cirkel*,) *ZZZ* — 1
- Hieruit volgt $\angle PSM = \angle QSM$. Verder geldt $\angle PSM + \angle QSM = 180°$; *gestrekte hoek*, dus $\angle PSM = \angle QSM = 90°$ — 1
- (Dit geeft $\angle CSM = 90°$) dus S ligt op de cirkel met middellijn MC; *Thales* — 1

of

- De loodlijn uit M op PQ snijdt PQ in het midden S; *loodlijn op koorde* — 2
- Dus S ligt op de cirkel met middellijn MC; *Thales* — 1

Kostenfuncties

15 maximumscore 4

- $G(q) = 0,2 \cdot q^2 - 1,2 \cdot q + 4,2 + \frac{1}{q}$ — 1
- $G'(q) = 0,4 \cdot q - 1,2 - \frac{1}{q^2}$ — 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $0,4 \cdot q - 1,2 - \frac{1}{q^2} = 0$ kan worden opgelost — 1
- Het antwoord $q \approx 3,2$ — 1

16 maximumscore 5

- $M(q) = T'(q) = 3a \cdot q^2 + 2b \cdot q + c$ — 1
- Dus $M'(q) = (T''(q) =)\ 6a \cdot q + 2b$ — 1
- $M'(q) = (T''(q) =)\, 0$ geeft $6a \cdot q + 2b = 0$ ofwel $b = -3a \cdot q$ — 1
- q is een (productie)hoeveelheid en dus geldt $q > 0$ — 1
- Uit $q > 0$ en $a > 0$ volgt $b < 0$ — 1

of

- $M(q) = T'(q) = 3a \cdot q^2 + 2b \cdot q + c$ — 1
- De grafiek van M is (omdat $a > 0$) een dalparabool met $q_{top} = -\frac{2b}{2 \cdot 3a} = -\frac{b}{3a}$ — 2
- q is een (productie)hoeveelheid en dus geldt $q_{top} > 0$ — 1
- Uit $q_{top} > 0$ en $a > 0$ volgt $b < 0$ — 1

17 maximumscore 4

- $G'(q) = \dfrac{T'(q) \cdot q - T(q) \cdot 1}{q^2}$ 2
- Uit $G'(q_0) = 0$ volgt $T'(q_0) \cdot q_0 - T(q_0) = 0$ 1
- Hieruit volgt $T'(q_0) = \dfrac{T(q_0)}{q_0}$, dus $M(q_0) = G(q_0)$ 1

Twee snijdende cirkels

18 maximumscore 4

- $MB = MD$ en $NB = NC$; *cirkel*, dus $\angle MDB = \angle MBD$ en $\angle NCB = \angle NBC$; *gelijkbenige driehoek* 1
- $\angle MBD = \angle NBC$; *overstaande hoeken* 1
- Dus $\angle MDB = \angle NCB$ ofwel $\angle MDN = \angle NCM$ 1
- Hieruit volgt dat de punten C en D op dezelfde cirkelboog MN liggen; *constante hoek* (dus M, N, C en D liggen op één cirkel) 1